Ennoncé :

On dispose de deux urnes U_1 et U_2, de six boules numérotées de 1 à 6 ainsi d'un dé équilibré.

Initialement l'urne U_1 contient les boules 1 et 2, l'urne U_2 contient les boules 3, 4, 5 et 6.

On appelle échange l'expérience consistant à lancer une fois le dé et à changer d'urne la boule portant le numéro obtenu avec le dé.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules contenues dans l'urne U_1 aprés n échanges successifs.

1. Les cinq premiers lancers du dé donnent : 1, 3, 2, 3, 5. Quel est le contenu de l'urne U_1 à l'issue du cinquiéme échange ?
2. Quelle est la loi de X_1 ? Calculer l'espérance de X_1.
3. (a) Montrer que pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$ on a :
   i. $p(X_{n+1}=0)=\dfrac{1}{6}.p(X_n=1)$.
   ii. Pour tout k, $1 \leq k \leq 5$:
   $$p(X_{n+1}=k)=\frac{7-k}{6}.p(X_n=k-1)+\frac{k+1}{6}.p(X_n=k+1).$$
   iii. $p(X_{n+1}=6)=\dfrac{1}{6}.p(X_n=5)$.

   (b) En déduire en écrivant tous les termes que pour tout entier n non nul :
   $$E(X_{n+1})=\frac{2}{3}.E(X_n)+1.$$
   (c) Calculer $E(X_n)$ en fonction de n puis $\lim\limits_{n\to+\infty} E(X_n)$.

Corrigé :

1. à l'issue du cinquiéme tirage U_1 contient la boule n° 5.
2. X_1 est le nombre de boule dans l'urne U_1 à l'issue du premier échange, $X_1(\Omega)=\{1,3\}$ et $p(X_1=1)=p(1\cup 2)=\dfrac{2}{6}$ par équiprobabilité des faces du dé et $p(X_1=3)=p(3\cup 4\cup 5\cup 6)=\dfrac{4}{6}$.
3. (a) i. Pour obtenir $(X_{n+1}=0)$ on n'a pas pu gagner de boule mais seulement en perdre. Donc $(X_{n+1}=0)=(X_n=1\cap \text{ } une\ perdu)$ donc :
   $$p(X_{n+1}=0)=p(X_n=1).p(une\ perdue/X_n=1)=\frac{1}{6}.p(X_n=1).$$
   ii. Pour tout entier k, $1\leq k\leq 5$, on a pu en perdre une ou en gagner une donc :
   $$(X_{n+1}=k)=(X_n=k-1\cap gagner\ une)\cup(X_n=k+1\cap perdre\ une)$$
   et comme ils sont incompatibles on a :
   $$\begin{aligned}p(X_{n+1}=k)&=p(X_n=k-1\cap gagner\ une)+p(X_n=k+1\cap perdre\ une)\\&=p(X_n=k-1).p(gagner\ une/X_n=k-1)\\&\quad+p(X_n=k+1).p(perdre\ une/X_n=k+1).\end{aligned}$$
   et quand l'urne U_1 en contient $k-1$, pour en gagner une il faut obtenir un des numéros de U_2 : il y en a $6-(k-1)=7-k$. Donc :
   $$p(gagner\ une/X_n=k-1)=\frac{7-k}{6}.$$
   Quand l'urne U_1 en contient $k+1$, pour en perdre une il faut obtenir un de ses $k+1$ numéros. Donc $p(perdre\ une/X_n=k+1)=\dfrac{k+1}{6}$ et finalement :
   $$p(X_{n+1}=k)=\frac{7-k}{6}.p(X_n=k-1)+\frac{k+1}{6}.p(X_n=k+1).$$
   iii. Et enfin :
   $$p(X_{n+1}=6)=p(X_n=5\cap gagner\ une)=\frac{1}{6}.p(X_n=5).$$
   La formule générale est également valable pour $k=0$ et $k=6$.

   (b)
   $$E(X_{n+1})=\frac{2}{3}E(X_n)+1$$
   Du calcul ! !

   (c) $(E(X_n))_n$ est une suite arithmético-géométrique et pour tout entier n on a :
   $$E(X_n)=(\frac{2}{3})^n.a+b.$$
   Connaissant $E(X_1)=\dfrac{7}{3}$ et $E(X_2)=\dfrac{23}{9}$ on en déduit que $a=-1$ et $b=3$ d'ou :
   $$E(X_n)=-(\frac{2}{3})^n+3$$
   et donc :
   $$\lim_{n\to+\infty}E(X_n)=3$$
   .