

Exercice 1 (Tirages dans une urne bicolore.)

Une urne contient r boules rouges et n boules noires. Une boule est choisie au hasard, et une seconde boule est ensuite choisie au hasard parmi les $r + n - 1$ boules restantes.

Trouver la probabilité pour que :

1. Les deux boules soient rouges.
2. La première boule soit rouge et la seconde noire.

Exercice 2 (Urne de Pôlya.)

Une urne contient r boules rouges et n boules noires. Une boule est choisie au hasard, on note sa couleur, et on la remet avec d boules supplémentaires de la même couleur. Puis on recommence la même procédure aussi souvent que nécessaire.

Trouver la probabilité pour que :

1. La seconde boule tirée soit noire.
2. La première boule est noire, sachant que la seconde est noire.

Exercice 3 (Le théorème de Bayes.)

Une matière étant enseignée par 3 professeurs A, B, C le sujet d'examen est susceptible d'être donné par l'un des 3 enseignants. D'après les statistiques des années précédentes et aussi d'après les charges d'examens prévues, les étudiants évaluent à :

- 0,35 la probabilité que ce soit l'enseignant A qui pose le sujet.
- 0,40 la probabilité que ce soit l'enseignant B qui pose le sujet.
- 0,25 la probabilité que ce soit l'enseignant C qui pose le sujet.

Par ailleurs, ils redoutent qu'un certain chapitre R fasse l'objet d'une question à l'examen. Par des déductions psychologiques, ils évaluent à 10% la probabilité que le chapitre R soit choisi si c'est l'enseignant A qui pose le sujet, 40% si c'est l'enseignant B , 80% si c'est l'enseignant C . Le jour J arrive et l'événement tant redouté se produit.

Quelles sont les probabilités que le sujet ait été posé par :

1. L'enseignant A .
2. L'enseignant B .
3. L'enseignant C .

Exercice 4 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.)

On lance n fois un dé et soit F_n la variable aléatoire égale à la fréquence d'apparition du six. $F_n = \frac{X_n}{n}$ où X_n est la variable aléatoire égale au nombre d'apparition du six.

Trouver n tel que $p(|F_n - \frac{1}{6}| < 0,99) \geq 0,99$.

Exercice 5 (Loi et antirépartition.)

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Une urne contient des boules numérotées de 1 à n . On tire les boules une à une et sans remise. On s'arrête dès que le numéro tiré est strictement supérieur à un numéro tiré précédemment. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

Préciser $X(\Omega)$, puis déterminer $p(X > k)$ et en déduire la loi de X .

Exercice 6 (Tirages sans remise.)

Une urne contient N boules numérotées de 1 à N . Soit n un entier compris entre 1 et N . On tire au hasard et simultanément n boules de l'urne (donc sans remise).

On note Y la variable aléatoire égale au plus petit numéro tiré.

1. Combien y a-t-il de poignées de n boules possibles ?
2. Quelles sont les valeurs que peut prendre Y ?
3. Combien y a-t-il de poignées telles que $[Y \geq k]$? En déduire $p'[Y \geq k]$.
4. Déterminer la loi de Y .

Exercice 7 (Rang d'apparition de boules lors de tirages dans une urne bicolore.)

Une urne contient $n - 2$ boules blanches et deux boules rouges. On tire successivement et sans remise toutes les boules. On désigne par X le rang d'apparition de la première boule rouge et par Y celui de la seconde. Déterminer la loi de X et celle de Y .

Solutions : Ex1 : a) $\frac{r}{n+r} \times \frac{r-1}{n+r-1}$ b) $\frac{r}{n+r} \times \frac{n}{n+r-1}$.

Ex2 : a) $\frac{n}{n+r}$ b) $\frac{d+n}{d+n+r}$.

Ex3 : a) $8,8608 \times 10^{-2}$ b) $0,40506$ c) $0,50633$.

Ex4 : $n \geq 16$

Ex5 : $X(\Omega) = [2, n]$, $p(X > k) = \frac{C_n^k}{A_n^k} = \frac{1}{k!}$, $p(X = k) = \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!}$.

Ex6 : a) C_N^n , b) $Y(\Omega) = [1, N - n + 1]$, c) $p(Y \geq k) = \frac{C_{N-k+1}^n}{C_N^n}$, d) $p(Y = k) =$

$\frac{C_{N-k}^{n-1}}{C_N^n}$.

Ex7 : $p(X = k) = \frac{2(n-k)}{n(n-1)}$ $p(Y = k) = \frac{2(k-1)}{n(n-1)}$.