

Feuille d'exercices ECT: Suites Numériques.

A.ELAKILI

3 octobre 2010

Mathématiques.elakili : <http://perso.menara.ma/~abdelakili/>

AL-KHWARIZMI Abu (VIII siècle) Al-Khwarizmi est né au 8 siècle en Perse. Entre 813 et 833, il a rédigé son premier livre d'algèbre dans lequel le vocabulaire algèbre apparaît pour la première fois en tant que tel pour désigner une discipline. Al-Khwarizmi a introduit la notion même d'équation du premier et du second degrés. Il est également à l'origine des notions de binôme et trinôme associés à l'équation, au sujet desquels il a examiné l'application des différentes lois de l'arithmétique. C'est également à lui que l'on doit le concept de la solution algorithmique. Le mot algorithme est la prononciation latine du nom d'Al-Khwarizmi, inventeur de l'algèbre.

Exercice 1

Étudier la monotonie des suites :

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} - n \quad ; \quad v_n = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{k+1}.$$

Exercice 2

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 > 0$; $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, u_n existe et $u_n > 0$, puis donner la monotonie de (u_n) .
2. La suite (u_n) peut-elle être majorée ?
3. Montrer par récurrence que : $\forall n \geq 0$, $u_n^2 \geq 2.n + u_0^2$ et déterminer la limite de la suite (u_n) .

Exercice 3

Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 > 0$, $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

1. Montrer que la suite (u_n) est bornée.
2. Étudier la monotonie de la suite (u_n)
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
4. Démontrer que $|u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{4} \cdot |u_n - 2|$. Conclure !

Exercice 4

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$, $u_{n+1} = 2.u_n + 3^2$.

Pour étudier cette suite, on introduit la suite auxiliaire $v_n = \frac{u_n}{3^n}$, $\forall n \geq 0$.

Montrer que (v_n) est une suite arithmético-géométrique ; en déduire la terme général de la suite (u_n) .

Exercice 5

Soit u_0 et v_0 deux nombres réels tels que : $0 < u_0 < v_0$.

On définit les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ par les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbf{N} : \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \quad ; \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Exercice 6

Étudiez la convergence de la suite définie par $u_0 = 0$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbf{N} : \quad u_{n+1} = \frac{1}{1 + u_n}.$$

Exercice 7

Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a :

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

En déduire le comportement de la suite de terme général :

$$u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Exercice 8

On considère la suite de terme général :

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

Montrer qu'il existe trois réels a, b et c tels que :

$$u_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}.$$

En déduire la limite de la suite définie par : $v_n = \sum_{k=1}^n u_k$.