Feuille d'exercices : Sommes, Produits et Récurrence.

A.ELAKILI

2 octobre 2010

Mathématiques.elakili : http ://perso.menara.ma/$\sim$abdelakili/

Exercice 1

Vérifier que pour tout $k \geq 2$: $\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.

En déduire que : $\forall n \geq 2, \quad \sum_{k=2}^{n} = \dfrac{1}{k(k-1)} = 1 - \dfrac{1}{n}$.

Calculer : $\sum_{k=1}^{n} \ln(1 + \dfrac{1}{k})$.

Exercice 2

Montrer que pour tout réel positif a et tout entier n : $(1+a)^n \geq 1 + na$.

Exercice 3

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbf{N}* : \sum_{k=1}^{n} k \times k! = (n+1)! - 1.$$

Exercice 4

Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}*$:

$$\prod_{k=1}^{n} (n+k) = 2^n \prod_{k=1}^{n} (2.k - 1).$$

Exercice 5

Clucler les sommes suivantes :

$$\sum_{k=2}^{n} (2.k+1), \quad \sum_{k=10}^{20} 3^{k+1}, \quad \prod_{k=29}^{79} \frac{2.k+1}{2.k-1}, \quad \prod_{k=1}^{n} 2^{\frac{1}{k.(k+1)}}.$$

Exercice 6

Soient $S_n \sum_{j=1}^{n} j^2, \quad T_n = \sum_{j=1}^{n} (j+1)^2, \quad A_n = \sum_{j=1}^{n} j.$

1. Exprimer S_{n+1} en fonction d S_n et de n.
2. À l'aide d'un changement d'indices adéquat, exprimer T_n en fonction de S_{n+1}.
3. En développant $(j+1)^2$, exprimer T_n en fonction de S_n, de A_n et de n.
4. En déduire la valeur de A_n.