

Exercice 1

Deviner le terme général des suites suivantes puis le montrer :

- $u_1 = 1$ et $\forall n \geq 1, u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 1}$.
- $v_0 = 0$ et $\forall n \geq 1, v_n = v_{n-1} + n$.

Exercice 2

Soit la suite u définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $u_n = \frac{n \cdot (n+2)}{(n+1)^2}$.

- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $0 < u_n \leq 1$.
- Montrer que la suite u converge vers 1.

Exercice 3

On considère la suite a de terme général :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : a_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right).$$

- Déterminer la monotonie de la suite a et le signe de a_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.
- Déterminer la limite de a_n quand n tend vers $+\infty$.
- On pose $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$. Calculer S_n en fonction de n , puis sa limite quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 4

Soit u la suite définie par : $u_0 = 0$ et $\forall n \geq 1, u_n = \ln(e - 1 + u_{n-1})$.

- Montrer que pour tout n dans \mathbb{N} , u_n existe et $u_n \geq 0$.
- Déterminer la monotonie de la suite u .

Exercice 5

Soit v la suite définie par : $v_0 = 2$ et pour tout $n \geq 0, v_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot (1 + v_n^2)$.

- Déterminer la monotonie de la suite v .
- La suite v peut-elle être majorée? (Supposer la suite majorée, raisonner et arriver à une contradiction)
- En déduire la limite de la suite v .

Exercice 6

Soit la suite u définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$.

- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 2$.
- Etudier le sens de variation de la suite u .
- En déduire que la suite u est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 7 Déterminer les limites des suites suivantes :

$$a_n = \sqrt{n^2 + 1} - n, \quad b_n = \frac{n^3 - n^2 + 1}{n^2 - n + 1}, \quad c_n = \frac{(n+2)!}{(2 \cdot n^2 + 1) \cdot n!}, \quad d_n = 2^n - 3^n + 4^n.$$

Exercice 8

On pose : $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{3 + 2 \cdot u_n}{u_n + 4}$.

- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n$ existe et $u_n > 0$.
- Montrer que $u_{n+1} = 1 \Leftrightarrow u_n = 1$. En déduire que pour tout n, u_n est différent de 1.
- On pose pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 3}$. Montrer que la suite $(v_n)_n$ est définie et géométrique.
En déduire pour tout n l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n .

Exercice 9

Soient u et v les deux suites définies pour tout $n \geq 0$ par :

$$u_{n+1} = \frac{1}{3} \cdot (2 \cdot u_n + v_n), \quad v_{n+1} = \frac{1}{3} \cdot (u_n + 2 \cdot v_n).$$

- On pose $t_n = u_n - v_n$ et $s_n = u_n + v_n$.
- Montrer que t et s sont deux suites géométriques.
- En déduire l'expression de t_n (resp. s_n) en fonction de t_0 (resp. s_0).
- En déduire l'expression de u_n et de v_n en fonction de n , de u_0 et de v_0 .

Exercice 10

Soit u la suite définie par $u_0 = 0$ et par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2 \cdot u_n + 3^n$. Pour étudier cette suite on introduit la suite auxiliaire $v_n = \frac{u_n}{3^n}$ pour tout $n \geq 0$.

Montrer que v est une suite arithmético-géométrique et en déduire le terme général de u .