Ennoncés :

Exercice 1
Justifier la convergence des séries suivantes et calculer leurs sommes :

$$\sum_{n\geq 1}\frac{n(n-1)}{6^n},\quad \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n.n}{2^n},\quad \sum_{n\geq 0}\frac{n^2+n+1}{n!},\quad \sum_{n\geq 2} n.(-1)^n.x^{n-2}.$$

Exercice 2
En calculant les sommes partielles, déterminer si les séries de terme général suivant (pour $n \geq 2$) sont convergentes, et dans ce cas donner leur somme :

$$u_n = \frac{\ln(\frac{n+1}{n})}{\ln(n).\ln(n+1)},\quad v_n = \ln(1-\frac{1}{n}).$$

Exercice 3
Soit $u_0 \in]0,1[$, $\forall n \in \mathbb{N}$ on pose : $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\quad 0 < u_n < 1$. puis que (u_n) converge vers 0.
2. Montrer que la série de terme général u_n^2 converge et calculer sa somme.

Exercice 4
Pour tout entier naturel n non nul on pose : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}$.
Montrer que les suites $(S_{2n})_n$ et $(S_{2n+1})_n$ sont adjacentes.
Que peut-on déduire sur la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n}$.?

Exercice 5
On considére la série de terme général $u_n = \dfrac{2n^2}{n^3-1}$ pour tout $n \geq 2$.
Montrer que : $\forall n \geq 2,\ u_n \geq \dfrac{2}{n}$; En déduire une minoration sur les sommes partielles et la nature de la série $\sum u_n$.

Exercice 6
Nature des séries de terme général suivant. On pourra majorer u_n, puis la suite des sommes partielles.

$$1)\ u_n = \frac{5}{4^n.\ln(n)},\qquad 2)\ u_n = \frac{1}{n^2}.$$

Exercice 8
On effectue une infinité de lancers d'une piéce truquée o'u p est la probabilité d'avoir pile. On introduit B "avoir au moins une fois pile" ainsi que $\forall n \in \mathbb{N}, A_n$ "obtenir au moins un pile durant les n premiers lancers".
Déterminer $P(A_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en déduire $P(B)$.