5 000229

4A72-33
repère à reporter sur la copie

SESSION DE 2005

concours externe de recrutement de professeurs agrégés

section : mathématiques

composition d'analyse et probabilités

Durée : 6 heures

Calculatrice électronique de poche, y compris programmable, alphanumérique ou à écran graphique, à fonctionnement autonome, non imprimante autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout document et de tout autre matériel électronique est interdit.

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront un élément important pour l'appréciation des copies.

Tournez la page S.V.P.

Notations

- Soient I un ensemble non vide et $(a_i)_{i\in I}$ une famille de nombres réels *positifs*. On appelle *somme* de cette famille et l'on note $\displaystyle\sum_{i\in I} a_i$ la borne supérieure dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ des sommes $\displaystyle\sum_{i\in J} a_i$ lorsque J décrit les parties finies de I.
- On pose $(+\infty)^{1/2} = +\infty$.
- Notons $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}^2}$ l'espace vectoriel complexe des familles $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ de nombres complexes.
- Le *support* d'un élément $\mathbf{a} = (a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}^2}$ est le sous-ensemble $\{(m,n)\in\mathbb{Z}^2 \mid a_{m,n} \neq 0\}$ de $\mathbb{Z}^2$.
- On note $\mathcal{A}$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}^2}$ formé des familles de support fini.
- Pour $(m,n)\in\mathbb{Z}^2$, on note $W_{m,n} \in \mathcal{A}$ la famille $(a_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{Z}^2}$ telle que $a_{m,n} = 1$ et $a_{p,q} = 0$ si $(p,q) \neq (m,n)$.
- Pour $\mathbf{a} = (a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}^2}$, on pose

$$\|\mathbf{a}\|_1 = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} |a_{m,n}| \qquad \text{et} \qquad \|\mathbf{a}\|_2 = \left(\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} |a_{m,n}|^2\right)^{1/2}.$$

- On pose $A_1 = \{\mathbf{a} \mid \|\mathbf{a}\|_1 \neq +\infty\}$ et $A_2 = \{\mathbf{a} \mid \|\mathbf{a}\|_2 \neq +\infty\}$.
- Dans tout le problème on fixe un nombre complexe λ de module 1.

Les parties I.B, II et III sont indépendantes

I. Algèbres de convolution « tordue »

A. La convolution tordue

1. (a) Montrer que l'on a $\displaystyle\sum_{(m,n)\in J} |a_{m,n}|^2 \leqslant \Big(\sum_{(m,n)\in J} |a_{m,n}|\Big)^2$ pour tout $\mathbf{a} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}^2}$ et toute partie finie J de $\mathbb{Z}^2$.

   (b) Montrer que, pour tout $\mathbf{a} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}^2}$, on a $\|\mathbf{a}\|_2 \leqslant \|\mathbf{a}\|_1$. En déduire que $A_1 \subset A_2$.

   > Les ensembles A_1 et A_2 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}^2}$. On munit dorénavant A_1 de la norme $\|\ \|_1$ et A_2 de la norme $\|\ \|_2$. Alors A_1 est un espace de Banach et A_2 est un espace de Hilbert. De plus, $\mathcal{A}$ est dense dans l'espace de Banach A_1 et dans l'espace de Hilbert A_2. *On ne demande pas de justifier ces faits.*

2. Montrer qu'il existe une unique forme linéaire continue $\sigma : A_1 \to \mathbb{C}$ telle que $\sigma(W_{m,n}) = 1$ pour tout $(m,n)\in\mathbb{Z}^2$.

   Si $\mathbf{a} = (a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ est un élément de A_1, on note $\displaystyle\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} a_{m,n}$ le nombre $\sigma(\mathbf{a})$.

3. Soient $\mathbf{a} = (a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ et $\mathbf{b} = (b_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ des éléments de A_2.

(a) Soient $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$. Montrer que la famille $\left(\lambda^{q(m-p)} a_{p,q} b_{m-p,n-q}\right)_{(p,q)\in\mathbb{Z}^2}$ est un élément de A_1.

(b) On pose $c_{m,n} = \sum_{(p,q)\in\mathbb{Z}^2} \lambda^{q(m-p)} a_{p,q} b_{m-p,n-q}$.

Montrer que $|c_{m,n}| \leqslant \|\mathbf{a}\|_2 \|\mathbf{b}\|_2$ et que, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $A \in \mathbb{N}$, tel que, $\forall (m,n) \in \mathbb{Z}^2$, on ait $|m| + |n| \geqslant A \Rightarrow |c_{m,n}| \leqslant \varepsilon$ (étudier d'abord le cas où $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$ et $\mathbf{b} \in \mathcal{A}$).

> On pose $\mathbf{a} \star \mathbf{b} = (c_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$.
> Si m, m', n, n' sont des entiers relatifs, on a $W_{m,n} \star W_{m',n'} = \lambda^{nm'} W_{m+m',n+n'}$; pour tout $\mathbf{a} \in A_2$, on a $W_{0,0} \star \mathbf{a} = \mathbf{a} \star W_{0,0} = \mathbf{a}$. *On ne demande pas de justifier ces faits.*

(c) Montrer que, pour $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A_1$ on a $\|\mathbf{a} \star \mathbf{b}\|_1 \leqslant \|\mathbf{a}\|_1 \|\mathbf{b}\|_1$.

(d) Montrer que le « produit » $\star$ est associatif sur A_1.

> Dans la suite du problème, on pose $\mathbf{1} = W_{0,0}$, $U = W_{1,0}$ et $V = W_{0,1}$. Pour $\mathbf{a} \in A_1$, on définit $\mathbf{a}^n$ pour $n \in \mathbb{N}$, en posant $\mathbf{a}^0 = \mathbf{1}$, et $\mathbf{a}^{n+1} = \mathbf{a}^n \star \mathbf{a}$. S'il existe un élément $\mathbf{b} \in A_1$ (nécessairement unique) tel que $\mathbf{a} \star \mathbf{b} = \mathbf{b} \star \mathbf{a} = \mathbf{1}$, on dira que $\mathbf{a}$ est *inversible* et on posera $\mathbf{b} = \mathbf{a}^{-1}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose alors $\mathbf{a}^{-n} = (\mathbf{a}^{-1})^n = (\mathbf{a}^n)^{-1}$.
> On remarque que $V \star U = \lambda(U \star V)$ et que, pour tout $m, n \in \mathbb{Z}$, on a $W_{m,n} = U^m \star V^n$.

B. Fonctions périodiques de classe C^1.

On note B l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe C^1 périodiques de période 1, muni de la norme $N : f \mapsto \sup\{|f(t)| + |f'(t)| \mid t \in \mathbb{R}\}$. On note $z \in B$ l'application $t \mapsto e^{2i\pi t}$. Pour $n \in \mathbb{Z}$, on note $z^n \in B$ l'application $t \mapsto e^{2i\pi nt}$.

1. (a) Montrer que pour tout $f, g \in B$, on a $N(fg) \leqslant N(f)N(g)$, où l'on a noté fg la fonction $t \mapsto f(t)g(t)$.

   (b) Montrer que le sous-espace de B engendré par la famille $(z^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est dense dans B.

2. (a) Montrer que, pour tout $f \in B$, la famille $\psi(f)$ définie par

$$\psi(f)_{m,n} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq 0 \\ \displaystyle\int_0^1 f(t) e^{-2i\pi mt}\,\mathrm{d}t & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

   est un élément de A_1. Montrer que l'application $\psi : B \to A_1$ ainsi définie est continue et vérifie $\psi(fg) = \psi(f) \star \psi(g)$ pour tout $f, g \in B$.

   Remarquons que l'on a $\psi(z) = U$.

   (b) Soit θ un nombre réel tel que $e^{2i\pi\theta} = \lambda$. Montrer que pour tout $f \in B$ on a l'égalité $V \star \psi(f) = \psi(g) \star V$ où g est la fonction $t \mapsto f(t+\theta)$.

II. Un calcul d'image et de noyau

A. Approximation des réels par des rationnels

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $\delta(x) = \inf \{|x-n| \mid n \in \mathbb{Z}\}$ sa distance à $\mathbb{Z}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Soient $s_0, \dots, s_{n+1} \in [0,1]$. Montrer qu'il existe des nombres entiers i et j satisfaisant $0 \leqslant i < j \leqslant n+1$ et $|s_i - s_j| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
   (b) Soient $t_0, \dots, t_n \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe des nombres entiers i et j satisfaisant $0 \leqslant i < j \leqslant n$ et $\delta(t_i - t_j) \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
   (c) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, il existe $k \in \mathbb{N}$ satisfaisant $1 \leqslant k \leqslant n$ et $\delta(kt) \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Pour $q \in \mathbb{N}^*$, posons $U_\alpha(q) = \{t \in \mathbb{R} \mid \delta(qt) < q^{-\alpha}\}$ et notons $Y_\alpha = \limsup\limits_{q \to \infty} U_\alpha(q)$ l'ensemble des t qui appartiennent à une infinité de $U_\alpha(q)$.
   (a) Montrer que $Y_1 = \mathbb{R}$.
   (b) Calculer la mesure de Lebesgue de $U_\alpha(q) \cap [0,1]$.
   (c) Montrer que pour $\alpha > 1$, l'ensemble Y_α est de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. En déduire que $Y = \bigcup\limits_{\alpha > 1} Y_\alpha$ est de mesure nulle (pour la mesure de Lebesgue).
3. (a) Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+$, l'ensemble Y_α est une intersection dénombrable d'ouverts de $\mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble $X = \bigcap\limits_{\alpha \in \mathbb{R}_+^*} Y_\alpha$ est dense dans $\mathbb{R}$ et que c'est une intersection dénombrable d'ouverts de $\mathbb{R}$.
   (b) Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrer que $t \notin X$ si et seulement s'il existe un polynôme P à coefficients réels tel que $P(n)\delta(nt) \geqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

B. Un calcul d'image et de noyau

Pour $\mathbf{a} = (a_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}^2}$, on pose $\tau(\mathbf{a}) = a_{0,0}$.

Pour tout $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A_2$, on a $\tau(\mathbf{a} \star \mathbf{b}) = \tau(\mathbf{b} \star \mathbf{a})$. *On ne demande pas la vérification de cette formule.*

Considérons les applications $S : x \mapsto U \star x \star U^{-1} - x$ et $T : x \mapsto V \star x \star V^{-1} - x$ de A_1 dans lui même. Notons $L : A_1 \to A_1 \times A_1$ et $M : A_1 \times A_1 \to A_1$ les applications linéaires définies par $L(x) = (S(x), T(x))$ et $M(x,y) = S(y) - T(x)$ (pour $x, y \in A_1$).

1. Montrer que $\mathrm{Im}L \subset \mathrm{Ker}M$.

   On suppose jusqu'à la fin du II que λ n'est pas une racine de 1. On écrira $\lambda = e^{2i\pi\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
2. Quel est le noyau de L ?
3. Montrer que l'adhérence de $\mathrm{Im}M$ est $\mathrm{Ker}\tau$. On munit l'espace vectoriel $A_1 \times A_1$ de la norme $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \mapsto \|\mathbf{a}\|_1 + \|\mathbf{b}\|_1$. Quelle est l'adhérence de $\mathrm{Im}L$?

4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\inf\{\|T(U^k)\|_1 \mid 1 \leqslant k \leqslant n\} \leqslant 2\sin\dfrac{\pi}{n+1}$.
En déduire que l'image de L n'est pas fermée.
5. On note $\mathcal{E} \subset A_1$ le sous-espace vectoriel formé des $\mathbf{a} = (a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} \in A_1$ tels que $a_{0,0} = 0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, la famille $(m,n) \mapsto (1+m^2+n^2)^k a_{m,n}$ appartienne à A_1. Les applications L et M induisent des applications linéaires $L' : \mathcal{E} \to \mathcal{E}\times\mathcal{E}$ et $M' : \mathcal{E}\times\mathcal{E} \to \mathcal{E}$. A quelle condition sur θ a-t-on $\mathrm{Im}L' = \mathrm{Ker}M'$ et $\mathrm{Im}M' = \mathcal{E}$?

III. Calcul de normes - stabilité par l'inverse

- Soit (E, N) un espace vectoriel (complexe) normé. On note $\mathcal{L}(E)$ l'espace vectoriel normé des applications linéaires continues de E dans lui-même. Rappelons que la norme d'un élément $T \in \mathcal{L}(E)$ est le nombre réel positif $|||T||| = \sup\{N(T(x)) \mid x \in E,\ N(x) \leqslant 1\}$.
- Soit E un espace de Hilbert (complexe). Notons $\langle\ |\ \rangle$ son produit scalaire. Soit $T \in \mathcal{L}(E)$; il existe un unique élément $T^* \in \mathcal{L}(E)$ appelé *adjoint* de T tel que pour tout $x, y \in E$ on ait $\langle T(x)|y\rangle = \langle x|T^*(y)\rangle$. On a $|||T^*||| = |||T|||$. *On ne demande pas de justifier ces faits.*
On dit que T est *unitaire* si T est bijectif et $T^{-1} = T^*$.

A. La représentation régulière.

1. Montrer que pour tout $\mathbf{a} \in A_1$ et tout $\mathbf{b} \in A_2$, on a $\|\mathbf{a}\star\mathbf{b}\|_2 \leqslant \|\mathbf{a}\|_1\|\mathbf{b}\|_2$.

> A l'aide de 1., on définit une application linéaire continue $\pi : A_1 \to \mathcal{L}(A_2)$ satisfaisant $\pi(\mathbf{a})(x) = \mathbf{a}\star x$ et $|||\pi(\mathbf{a})||| \leqslant \|\mathbf{a}\|_1$ pour $\mathbf{a} \in A_1$ et $x \in A_2$.

2. Montrer que $\pi(\mathbf{a}\star\mathbf{b}) = \pi(\mathbf{a})\circ\pi(\mathbf{b})$. Montrer que $\pi(U)$ et $\pi(V)$ sont unitaires.
3. Montrer que $\|\mathbf{a}\|_2 \leqslant |||\pi(\mathbf{a})|||$ pour tout $\mathbf{a} \in A_1$.

> Pour $\mathbf{a} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}^2}$, on note $\mathbf{a}^* \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}^2}$ la famille $(b_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ définie par :
> $$b_{m,n} = \lambda^{mn}\,\overline{a_{-m,-n}}.$$
> Pour tout $\mathbf{a} \in A_1$ l'adjoint $\pi(\mathbf{a})^*$ de $\pi(\mathbf{a})$ est $\pi(\mathbf{a}^*)$. *On ne demande pas de justifier cette formule.*

B. Un calcul de norme

1. Soient H un espace hilbertien complexe et $T \in \mathcal{L}(H)$. Rappelons que la suite $n \mapsto |||T^n|||^{1/n}$ est convergente. *On ne demande pas de justifier ce fait.*
Montrer que $|||T^*\circ T||| = |||T|||^2$. En déduire que $|||T||| = \lim\limits_{n\to\infty} |||(T^*\circ T)^n)|||^{1/2n}$.
2. Soit $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note k_n le nombre d'éléments du support de $\mathbf{a}^n$.
   (a) Montrer que $\|\mathbf{a}^n\|_1 \leqslant \|\mathbf{a}^n\|_2\sqrt{k_n}$.
   (b) Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on ait $k_n \leqslant r^2n^2$.
   (c) Montrer que l'on a $\lim\limits_{n\to\infty}\|\mathbf{a}^n\|_2^{1/n} = \lim\limits_{n\to\infty}|||\pi(\mathbf{a}^n)|||^{1/n} = \lim\limits_{n\to\infty}\|\mathbf{a}^n\|_1^{1/n}$.
   (d) Montrer que $|||\pi(\mathbf{a})||| = \lim\limits_{n\to\infty}\left\|(\mathbf{a}^*\star\mathbf{a})^n\right\|_1^{1/2n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\tau((\mathbf{a}^*\star\mathbf{a})^{2n})\right)^{1/4n}$.

Tournez la page S.V.P.

C. *Deux applications*

1. Soient H un espace hilbertien complexe et $u, v \in \mathcal{L}(H)$ des endomorphismes unitaires tels que $vu = \lambda uv$.

   (a) Montrer qu'il existe un unique homomorphisme continu $\sigma_{u,v} : A_1 \to \mathcal{L}(H)$ d'algèbres (*i.e.* une application continue qui soit à la fois linéaire et un homomorphisme d'anneaux) satisfaisant $\sigma_{u,v}(U) = u$, $\sigma_{u,v}(V) = v$. Montrer que, pour tout $\mathbf{a} \in A_1$, on a $|||\sigma_{u,v}(\mathbf{a})||| \leqslant \|\mathbf{a}\|_1$.

   (b) Montrer que, pour tout $\mathbf{a} \in A_1$, on a $|||\sigma_{u,v}(\mathbf{a})||| \leqslant |||\pi(\mathbf{a})|||$.

2. On note A l'adhérence de $\pi(A_1)$ dans $\mathcal{L}(A_2)$. Soit $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$. On suppose que $\pi(\mathbf{a})$ est inversible dans A.

   (a) Montrer qu'il existe $\mathbf{b} \in \mathcal{A}$ tel que $|||\pi(\mathbf{1} - \mathbf{a} \star \mathbf{b})||| < 1$ et $|||\pi(\mathbf{1} - \mathbf{b} \star \mathbf{a})||| < 1$.

   (b) Montrer que $\mathbf{a}$ est inversible dans A_1.

D. *Idéaux bilatères et représentations*

On suppose que λ n'est pas une racine de 1.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbf{a} \in A_1$ on pose $\tau_n(\mathbf{a}) = n^{-2} \sum_{0 \leqslant j,k < n} U^j \star V^k \star \mathbf{a} \star V^{-k} \star U^{-j}$.

   (a) Montrer que pour tout $\mathbf{a} \in A_1$, la suite $\tau_n(\mathbf{a})$ converge dans A_1 vers $\tau(\mathbf{a})\mathbf{1}$ (on pourra commencer par traiter le cas où $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$).

   (b) Soit $\mathbf{a} \in A_1$ non nul. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\tau_n(\mathbf{a}^* \star \mathbf{a})$ soit inversible dans A_1.

2. Montrer que tout idéal bilatère non nul de A_1 est égal à A_1.

3. Soient H un espace hilbertien complexe non nul et $u, v \in \mathcal{L}(H)$ des endomorphismes unitaires tels que $vu = \lambda uv$. On note $\sigma_{u,v} : A_1 \to \mathcal{L}(H)$ l'homomorphisme continu d'algèbres satisfaisant $\sigma_{u,v}(U) = u$ et $\sigma_{u,v}(V) = v$.

   (a) Montrer que, pour tout $\mathbf{a} \in A_1$, on a $|\tau(a)| \leqslant |||\sigma_{u,v}(\mathbf{a})|||$.

   (b) Montrer que, pour tout $\mathbf{a} \in A_1$, on a $|||\sigma_{u,v}(\mathbf{a})||| = |||\pi(\mathbf{a})|||$.

IV. Une égalité de norme

Considérons les espaces hilbertiens suivants :

- $H_{\mathbb{R}}$ désigne l'espace $L^2(\mathbb{R})$ des classes de fonctions $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mesurables et de carré intégrable pour la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}$ (modulo les fonctions négligeables), muni de la norme $\xi \mapsto \left(\int_{\mathbb{R}} |\xi(t)|^2 \, \mathrm{d}t \right)^{1/2}$.
- $H_{\mathbb{U}}$ désigne l'espace des classes de fonctions $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mesurables périodiques de période 1 telles que $\int_0^1 |\xi(t)|^2 \, \mathrm{d}t < +\infty$ (modulo les fonctions négligeables), muni de la norme $\xi \mapsto \left(\int_0^1 |\xi(t)|^2 \, \mathrm{d}t \right)^{1/2}$.

- $H_{\mathbb{Z}}$ désigne l'espace $\ell^2(\mathbb{Z})$ des fonctions $\xi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ telles que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\xi(n)|^2 < +\infty$, muni de la norme $\xi \mapsto \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\xi(n)|^2\right)^{1/2}$.

On ne demande pas de vérifier que ce sont des espaces hilbertiens.

Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Soit $N \in \mathbb{N}$. Donnons-nous des fonctions $(f_k)_{-N\leqslant k\leqslant N}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, périodiques de période 1.

Considérons les opérateurs $T_{\mathbb{R}} \in \mathcal{L}(H_{\mathbb{R}})$ et $T_{\mathbb{U}} \in \mathcal{L}(H_{\mathbb{U}})$ définis de la manière suivante : si $\tilde{\xi} \in H_{\mathbb{R}}$ (*resp.* $\tilde{\xi} \in H_{\mathbb{U}}$) est la classe d'une fonction mesurable $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, on note $T_{\mathbb{R}}\tilde{\xi}$ (*resp.* $T_{\mathbb{U}}\tilde{\xi}$) la classe dans $H_{\mathbb{R}}$ (*resp.* dans $H_{\mathbb{U}}$) de la fonction $t \mapsto \sum_{k=-N}^{N} f_k(t)\xi(t+k\theta)$.

Si $\xi \in H_{\mathbb{Z}}$, on pose $T_{\mathbb{Z}}\xi(n) = \sum_{k=-N}^{N} f_k\left(\frac{n}{\theta}\right)\xi(n+k)$.

Montrer que $|||T_{\mathbb{R}}||| = |||T_{\mathbb{U}}||| = |||T_{\mathbb{Z}}|||$.
