

École Normale Supérieure de Casablanca
Cycle de Préparation à l'Agrégation de Mathématiques

Algèbre linéaire, Groupe linéaire

Exercice 1 :

On suppose $n \geq 2$. Montrer que, si $A \in M_n(\mathbb{K})$, il existe des matrices $U, V \in GL_n(\mathbb{K})$ telles que :
 $A = U + V$.

Exercice 2 :

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, et $u, v \in \mathcal{L}(E)$.

On suppose que $u \circ v = v \circ u$, et que v est nilpotent.

- a) Prouver que $u + v \in GL(E)$ si et seulement si $u \in GL(E)$.
- b) Montrer que $\det(u + v) = \det(u)$.
- c) Prouver que $u + v$ et u ont même polynôme caractéristique.

Exercice 3 :

Pour $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, $n \geq 1$, on pose : $[A, B] = AB - BA$.

Soient $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ vérifiant $[A, [A, B]] = 0$.

- a) Prouver que $C = [A, B]$ est nilpotente.
- b) On suppose A nilpotente. Montrer que AB l'est aussi.

Exercice 4 :

Si $A \in GL_n(\mathbb{R})$, montrer l'équivalence de :

- (i) Les coefficients de A et A^{-1} sont positifs ou nuls.
- (ii) A est à éléments dans \mathbb{R}^+ , et chaque ligne et chaque colonne de A contient un et un seul terme non nul.

Exercice 5 :

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel.

1. On suppose E de dimension finie non nulle. Soient $u \in \mathcal{L}(E) \setminus \{0\}$, D une droite de E et H un hyperplan de E . Montrer qu'il existe $v, w \in \mathcal{L}(E)$ tels que : $Im(v \circ u \circ w) = D$ et $Ker(v \circ u \circ w) = H$.

2. Prouver que les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) E est de dimension finie
- (ii) Les seuls idéaux bilatères de $\mathcal{L}(E)$ sont $\{0\}$ et $\mathcal{L}(E)$.

Exercice 6 :

Pour $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$, on définit :

- 1) E_{ij} , matrice de Kronecker, qui a pour seul terme non nul $a_{ij} = 1$.
- 2) $B_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij}$.
- a) Pour $A \in GL(n, \mathbb{K})$, déduire en fonction de A , en termes de lignes ou de colonnes $B_{ij}(\lambda)A$ et $AB_{ij}(\lambda)$.
- b) On pose $P_{ij} = B_{ij}(1)B_{ji}(-1)B_{ij}(1)$. Décrire $P_{ij}A$.
- c) Montrer que, si $A \in SL(n, \mathbb{K})$, A s'écrit comme produit de matrices $B_{ij}(\lambda)$ (Procéder par récurrence en modifiant A par multiplication à gauche par des $B_{ij}(\lambda)$. Faire apparaître d'abord un 1 à la place a_{11} , puis des 0 aux places a_{i1} , $i \neq 1$ etc ...)
- d) Utiliser c) pour donner une méthode pratique d'inversion des matrices (faire subir les mêmes manipulations à A et I pour obtenir I et A^{-1}).
- e) Utiliser les matrices $B_{ij}(\lambda)$ pour calculer le centre de $GL(n, \mathbb{K})$.