Mardi 02 Octobre 2007
Mr.Elakili

École Normale Supérieur de Casablanca
Cycle de Préparation à l'Agrégation de Mathématiques
⋆⋆⋆
Application du lemme des Noyaux aux suites récurrentes linéaires.
⋆⋆⋆

On considére une suite d'éléments de $\mathbb{C}$ définie par récurrence par :

$$(1) \qquad u_n = a_0.u_{n-p} + a_1.u_{n-p+1} + ... + a_{p-1}.u_{n-1} \quad (\ u_i \text{ étant donné pour } i < n).$$

On peut en fait noter $X_n = (u_{n-p}, u_{n-p+1}, ..., u_{n-1})$ alors $X_{n+1} = M.X_n$ avec

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & . & . & . & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & . & . & a_{p-2} & a_{p-1} \end{pmatrix}$$

On suppose a_0 non nul, cas auquel on peut toujours se ramener, une telle suite est dite suite récurrente linéaire.

Le polynome caractéristique de M est : $P = X^p - a_0 - a_1X - a_2X^2 - ... - a_{p-1}X^{p-1}$.

Par définition ce polynome est appelé polynome caractéristique de la relation de récurrence linéaire.(1)

L'espace E des suites vérifiant la relation (1) est le noyau de $P(f)$, avec f l'application qui à une suite (u_n) associe (u_{n+1}) (ceci découle immédiatement de la définition de P !).

P est scindé, d'aprés le lemme des Noyaux, E est égal à la somme directe des $Ker(f - \lambda_i Id)^{\alpha_i}$ avec les λ_i sont les racines de P avec pour ordre de multiplicité les α_i.

On va donc chercher à exprimer les solutions comme combinaisons linéaires d'éléments des

$$N_i = Ker(f - \lambda_i Id)^{\alpha_i}$$

, il convient donc de déterminer une base de N_i. Pour cela on considére l'opérateur :

$$D : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X], Q \mapsto Q(X+1) - Q(X)$$

. On identifie $\mathbb{N}$ à $\mathbb{N}.1_{\mathbb{K}}$, on considére $Q \in \mathbb{K}[X]$, de degré $< \alpha$, ensuite on définit $u_n = u_n^Q = \lambda^n.Q(n)$.

L'image de u_n par $f - \lambda Id$ est $n \mapsto \lambda^{n+1}.D(Q)$, son image par $(f - \lambda Id)^2$ est $\lambda^{n+2}.D^2(Q)$ et donc par $(f - \lambda Id)^\alpha$ est $n \mapsto \lambda^{n+\alpha}.D^\alpha(Q)$. Or on constate immédiatement que $deg(D(Q)) = deg(Q) - 1$ si Q est de $deg \geq 1$, et $D(Q) = 0$ sinon, et donc vu la limite sur le degré de Q, $(f - \lambda Id)^\alpha(u_n) = 0$.
Donc on obtient des éléments de E en considérant des suites de la forme $n \mapsto \lambda_i^n n^q$ pour $0 \leq q \leq \alpha_i$, il reste à voir si l'on obtient bien une base de E. Si la famille est libre, alors son cardinal fait que l'on a une base de E.($\sum \alpha_i = n$), il suffit donc de montrer que cette famille est libre.

Il suffit de montrer que l'application $Q \mapsto u^Q = \lambda^n Q(n)$ est linéaire et injective.

La linéarité est évidente.

Supposons que $u^Q = 0$, alors $Q(n) = 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}$ (en effet $\lambda_i \neq 0$ car $a_0 \neq 0$) donc $Q = 0$.

D'ou le résultat désiré. Etant donnés les premiers termes u_i pour $i < n$, on peut reconstituer alors la suite en écrivant à priori la suite sous la forme : $\sum Q_i(n).\lambda_i^n$ avec Q_i de degré $< \lambda_i$; les coéfficients se déduisent par une résolution du systéme linéaire.