

École Normale Supérieure de Casablanca
Cycle de Préparation à l'Agrégation de Mathématiques

AUTOUR DU THÉORÈME DES INVARIANTS DE SIMILITUDE.

Dans toute la suite E désigne un espace vectoriel de dimension finie non nulle sur un corps \mathbb{K} et u un endomorphisme de E .

Définition 1 :

Si F est un sous-espace vectoriel de E , stable par u , on dira que u est F -cyclique (ou que F est u -monogène) ssi il existe $x \in F$ tel que :

$$F = \{P(u)(x) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$$

Notre objet sera de démontrer le résultat suivant :

Théorème 1 :

Il existe F_1, F_2, \dots, F_r sous-espaces vectoriels de E u -stables tels que :

- $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_r$,
- F_i est u -monogène,
- Si P_i désigne le polynôme minimal de $u|_{F_i}$, alors $P_{i+1} | P_i$.

La suite des polynômes P_1, \dots, P_r ne dépend que de u , et non du choix de la décomposition. Elle est appelée suite des invariants de similitude de u .

Commençons par introduire quelques notations concernant les polynômes minimaux : Π_u désigne le polynôme minimal de u , c'est à dire le polynôme unitaire de $\mathbb{K}[X]$ tel que :

$$\Pi_u \cdot \mathbb{K}[X] = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(u) = 0\}$$

Pour $a \in E$, on notera $\Pi_{u,a}$ le polynôme tel que :

$$\Pi_{u,a} \cdot \mathbb{K}[X] = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(u)(a) = 0\}$$

Lemme 1 :

Soient a_1, a_2, \dots, a_p des éléments de E tels que les sous-espaces vectoriels $G_i = \{P(u)(a_i) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$

soient en somme directe. On pose $a = \sum_{i=1}^p a_i$, alors :

$$\Pi_{u,a} = \bigvee_{i=1}^p \Pi_{u,a_i}$$

Proposition 1 :

Il existe $a \in E$ tel que : $\Pi_u = \Pi_{u,a}$.

Exercice 1 :

Montrer l'équivalence de u est F -cyclique avec l'égalité des polynômes minimal et caractéristique de $u|_F$.

Proposition 2 :

Si u est E -cyclique, alors il existe une base de E telle que la matrice de u dans cette base soit la matrice compagnon :

$$C(\Pi_u) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & & \vdots & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Applications du théorème des invariants de similitude :

Théorème 2 (Réduction de Frobenius) :

Si P_1, \dots, P_r désigne la suite des invariants de similitude de u , alors il existe une base de E dans laquelle u a pour matrice :

$$\begin{pmatrix} C(P_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & C(P_r) \end{pmatrix}$$

Théorème 3 : (réduction de Jordan)

Si le polynôme caractéristique de u est scindé sur \mathbb{K} , alors il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est de la forme :

$$\begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_s \end{pmatrix}$$

où les blocs de jordan J_i sont du type :

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots \\ 0 & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

Les λ_i sont les valeurs propres (non nécessairement distinctes) de u .

Théorème 4 (Caractérisation des classes de similitude) :

Deux endomorphismes sont semblables ssi ils ont les mêmes invariants de similitude.

Corollaire 1 :

Si \mathbb{L} est une extension de \mathbb{K} , et si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables sur \mathbb{L} , alors elles sont semblables sur \mathbb{K} .

Lemme 2 :

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et \mathbb{L} une extension de \mathbb{K} , on note $\Pi_{\mathbb{K}}$ et $\Pi_{\mathbb{L}}$ les polynômes minimaux de A respectivement sur \mathbb{K} et \mathbb{L} . Alors $\Pi_{\mathbb{K}} = \Pi_{\mathbb{L}}$.

Exercice 2 :

Soit $n = 2$ ou 3 et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A et B sont semblables si et seulement si elles ont même polynôme caractéristique et même polynôme minimal. Trouver un contre-exemple pour $n = 4$.

Exercice 3 :

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, montrer que u est cyclique si et seulement si les seuls endomorphismes commutant avec u sont les polynômes en u .

Calcul pratique des invariants de similitude :

Théorème 6 :

Soit M la matrice de u dans une base de E . Les invariants de similitude de u sont les facteurs invariants différents de 1 de la matrice $M - XI \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}[X])$.

Exemple 1 :

Déterminer les invariants de similitude des matrices suivantes et en déduire leurs réduites de jordan :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 2 & 6 & -10 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$