Analyse de FOURIER.

Les séries de Fourier ont été introduites par Joseph Fourier en 1822, mais il fallut un siècle pour que les analystes dégagent les outils d'étude adaptés : une théorie de l'intégrale pleinement satisfaisante et les premiers concepts de l'analyse fonctionnelle. Elles font encore actuellement l'objet de recherches actives pour elles-mêmes, et ont suscité plusieurs branches nouvelles : analyse harmonique, théorie du signal, ondelettes, etc.

Les séries de Fourier se rencontrent usuellement dans la décomposition de signaux périodiques, dans l'étude des courants électriques, des ondes cérébrales, dans la synthèse sonore, le traitement d'images, etc.

1 Rappels.

Notation

Dans la suite, on notera $f(c^-)$ (resp.$f(c^+)$) la limite à gauche (resp. à droite) de f en un point c de $\mathbb{R}$.

Définition. Fonctions continues par morceaux.

Soit f une fonction définie sur un intervalle fermé borné $[a, b]$, à valeurs réelles ou complexes. On dit que f est continue par morceaux sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $(x_i)_{0 \le i \le n}$ de $[a, b]$, $(a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b)$, telle que, pour tout $i = 0, ..., n-1$, on ait les propriétés suivantes :

1) la fonction f est continue sur chaque intervalle ouvert $]x_i, x_{i+1}[$,
2) la fonction f posséde une limite à droite en x_i et à gauche en x_{i+1}.

Remarque : Toute fonction continue par morceaux sur un segment est bornée.

Définition. Fonctions C^1 par morceaux.

Soit f une fonction définie sur un intervalle fermé borné $[a, b]$, à valeurs réelles ou complexes. On dit que f est de classe C^1 par morceaux sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $(x_i)_{0 \le i \le n}$ de $[a, b]$, $(a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b)$, telle que, pour tout $i = 0, ..., n-1$, on ait les propriétés suivantes :

1) la fonction f est de classe C^1 sur chaque intervalle ouvert $]x_i, x_{i+1}[$,
2) la dérivée f' posséde une limite à droite en x_i et à gauche en x_{i+1}.

Remarque : Si f est de classe C^1 par morceaux sur le segment $[a, b]$ alors f est continue par morceaux sur $[a, b]$.

On peut étendre la formule d'intégration par parties pour les fonctions seulement de classe C^1 par morceaux, la dérivée d'une telle fonction existe sur $[a, b]$ sauf peut etre en un nombre fini de points à savoir les points de la subdivision adaptée à f.

Proposition.

Soient f et g des fonctions continues sur $[a, b]$ et de classe C^1 par morceaux sur $[a, b]$. Alors on a la formule d'intégration par parties usuelles :

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Définition. Fonctions périodiques.

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles ou complexes et $T > 0$, on dit que f est T-périodique si on a : $\forall x \in \mathbb{R} \;:\; f(x+T) = f(x)$

Lemme : Soit f une fonction T-périodique continue par morceaux. Alors l'intégrale $\int_a^{a+T} f(x)dx$ ne dépend pas du choix du réel a, en d'autres termes :

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx.$$

Remarque : Pour toute fonction f 2π-périodique continue par morceaux, on a :

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx.$$

Définition. Convolution.

Soient f et g deux fonctions 2π-périodique continues par morceaux. On appelle produit de convolution de f et g la fonction $f * g$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad f * g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(x-t)dt.$$

Proposition.

Soient deux fonctions 2π-périodique par morceaux f et g, leur produit de convolution $f * g$ est une fonction bien définie 2π-périodique et on a $f * g = g * f$, de plus, si l'une des fonctions f ou g est continue sur $\mathbb{R}$, alors $f * g$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Preuve.

En supposant que f est 2π périodique continue par morceaux et g 2π périodique continue, on peut donner une preuve directe de la continuité de $f * g$ en utilisant le fait que g est uniformément continue sur $[-\pi, \pi]$.

2 Polynômes trigonométriques et séries de FOURIER.

Définition. Polynômes triogonométriques.

On appelle polynômes trigonométriques toute fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par une expression de la forme :

$$P(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}.$$

où N est un entier naturel et où $c_{-N}, ..., c_{-1}, c_0, c_1, ..., c_N$ sont des coéfficients complexes.

Proposition.

Soit $P(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}$. un polynôme trigonométrique, pour tout entier n avec $-N \leq n \leq N$, on a :

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(t)e^{-int}dt.$$

Remarque.

On pourra aussi montrer que : $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(t)e^{-int}dt = 0$ pour tout $|n| > N$, ces résultats établissent l'unicité de l'écriture d'un polynômes trigonométrique.

Définition. Coéfficients de Fourier.

Soit f une fonction 2π-périodique continue par morceaux. On définit les coéfficients de Fourier de f par :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt.$$

Propriétés.

1) Soit f une fonction 2π-périodique continue par morceaux et soit $g(t) = f(t+a), \forall t \in \mathbb{R}$ alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a : $\widehat{g}(n) = e^{ina}.\widehat{f}(n)$.
2) Soit f une fonction 2π-périodique de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a : $\widehat{f'}(n) = in\widehat{f}(n)$.

Définition.

Soit f une fonction 2π-périodique continue par morceaux, pour tout $N \in \mathbb{N}$, on appelle N-éme somme de Fourier de f le polynôme trigonométrique $P_N(f)$ défini par :

$$P_N f(x) = \sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}(n)e^{inx}.$$

On dit que la série de Fourier de f converge simplement (resp.uniformément) sur une partie X de $\mathbb{R}$ si la suite de fontions $(P_N f)_{N\geq 0}$v converge simplement (resp. uniformément) sur X. La limite de cette suite est alors appelée somme de la série de Fourier de f ; sa valeur en tout point $x \in X$ est notée :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n)e^{inx}.$$

Écriture réelle d'une série de Fourier :

Soit f une fonction 2π-périodique continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)dt.$$

On a alors :

$$P_N f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)).$$

Lorsque la série de Fourier converge simplement sur X, on a, en tout point x de X, la relation :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n)e^{inx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)).$$

Remarque.

Si la fonction f est à valeurs réelles, on a : $a_n = 2\Re(\widehat{f}(n)$ et $b_n = -2\Im(\widehat{f}(n)$.

3 L'approche (pré) hilbertienne.

Soit E l'espace vectoriel des fonctions 2π-périodiques continues par morceaux et F les sous-espace vectoriel des fonctions de E vérifiant en plus la condition : $\forall a \in \mathbb{R}, \quad f(a^+) = f(a)$.

Pour tout couple $(f/g) \in E^2$, on pose : $< f, g >= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t).\overline{g(t)}dt$.
On définit ainsi un produit scalaire sur F, ce qui fait de F un espace préhilbertien complexe.

Lemme.

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on note e_n l'élément de F donné par $e_n(x) = e^{inx}$ on a les résultats suivants :
1) La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est orthonormale dans F.
2) Pour tout $f \in F$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, on a : $\widehat{f}(n) =< f/e_n >$.

Proposition.

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on note F_N le sous-espace vectoriel de F engendré par e_k, pour $-N \leq k \leq N$, autrement dit le sous-espace vectoriel des polynômes trigonométriques de degré inférieur ou égal à N, on a :
1) Pour tout $f \in F$ et tout $N \in \mathbb{N}$, $P_N f$ est la projection orthogonale de f sur F_N.
2) Si $f \in F$ et $N \in \mathbb{N}$. Pour tout polynôme trigonométrique Q de degré inférieur ou égal à N, on a : $||f - Q|| \geq ||f - P_N f||$ et l'égalité a lieu si et seulement si $Q = P_N f$.

Preuve.

Utiliser le théorème de la projection orthogonale.

Remarque.

$P_N f$ est parmi les polynômes trigonométriques de degré inférieur ou égal à N celui qui réalise la meilleure approximation de f au sens de l'écart quadratique moyen.

Théorème. Inégalité de Bessel

Soit f une fonction 2π-périodique continue par morceaux. Alors la série, $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|^2$ converge et on a :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(n)|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt.$$

Preuve.

Commencer tout d'abord par le cas $f \in F$ et montrer que $||PNf||^2 \leq ||f||^2$.

Pour $f \in E$, soit $f_0 \in F$ définie par : $f_0(x) = f(x)$ si f est continue en x, et $f_0(x) = f(x^+)$ sinon, montrer que $\widehat{f}(n) = \widehat{f_0}(n)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f_0(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt$, puis conclure.

Corollaire.

Soit f une fonction 2π-périodique continue par morceaux. On a :

$$\lim_{|n|\to+\infty} \widehat{f}(n) = 0$$

.

Corollaire. Lemme de Riemann-Lebesgue

Soit g une fonction continue par morceaux sur un intervalle $[a, b]$. On pose :

$I_n = \int_a^b g(t)e^{int}dt, \quad J_n = \int_a^b g(t)\cos(nt)dt$ et $K_n = \int_a^b g(t)\sin(nt)dt$. alors on a :

$$\lim_{|n|\to+\infty} I_n = \lim_{|n|\to+\infty} J_n = \lim_{|n|\to+\infty} K_n = 0.$$

Preuve.

Distinguer les cas $b - a < 2\pi$ et $b - a \geq 2\pi$ et utiliser le théorème.

Proposition.

Si une série trigonométrique converge uniformément sur $\mathbb{R}$, alors elle est la série de Fourier de sa somme.

Définition. Noyau de Dirichlet.

Soit N un entier naturel. On appelle noyau de Dirichlet de rang N la fonction D_N définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad D_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} e^{inx}.$$

Lemme 1.

On a : $\frac{1}{2\pi}\int -\pi^{\pi} D_N(t)dt = 1$.

Lemme 2.

On a : $D_N(t) = \frac{\sin((2N+1)\frac{t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})}$ pour $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$ et $D_N(t) = 2N + 1$ pour $t \in 2\pi\mathbb{Z}$.

Proposition.

Soient f une fonction 2π-périodique continue par morceaux et $N \in \mathbb{N}$. On a :

$$P_N(f) = D_N * f.$$

Théorème. Théorème de Dirichlet.

Soit f une fonction 2π-périodique de classe C^1 par morceaux. Alors la série de Fourier de f converge simplement sur $\mathbb{R}$ et on a, pour tout $x\mathbb{R}$:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n)e^{inx} = \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-)).$$

Preuve.

À suivre ...